**ESTATÍSTICA I - 2º Ano Gestão Desporto, Exame Época Recurso 03. 02. 2021**

**1,5 horas. (cotação 14 valores)**

**Questões de resposta aberta**

**Nome:**____________________________________________________________**Número:**_____

**Espaço reservado para classificações**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1a. (20) | 2a. (10) | 3a. (15) | 4. (10) | 6. (10) |
| 1b. (15) | 2b. (15) | 3b. (10) | 5. (15) | 7. (10) |
| | 2c. (10) | | | |

**Atenção: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.**

**1.** Num determinado país existem três canais de televisão com sinal aberto. Sabe-se que 70% das pessoas vêem regularmente o canal **A**, 50% o canal **B** e 30 veêm os canais **A** e **C** % o canal **C**. Sabe-se ainda que 75% das pessoas veêm regularmente pelo menos dois canais (25% veêm os canais **A** e **B,** 45% veêm os canais **A** e **C**, 35% vêem os canais **B** e **C**).

**a.** Sabendo que uma determinada pessoa, escolhida ao acaso, afirmou que via regularmente o canal **C**, calcule a probabilidade dessa pessoa ser também espectador regular dos outros dois canais.

$A$ –ver canal A; $B$ – ver canal B; $C$ – ver canal C;

$P(A) = 0.7;\ P(B) = 0.5;\ P(C) = 0.3; P(A \cap B) = 0.25; P(A \cap C) = 0.45;\ P(B \cap C) = 0.35;$

$$P[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] = 0.75$$

$$P[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 2 * P(A \cap B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B \cap C) = \frac{[P(A\cap B) + P(A\cap C) + P(B\cap C)] - P[(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)]}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B \cap C) = \frac{1.05-0.75}{2} = 0.15$$

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)} = \frac{0.15}{0.3} = 0.5$$

**b.** Seleccionados, aleatoriamente, 8 habitantes desse país qual a probabilidade de menos de 5 verem os canais **A** e **B**?

**i)** 0.0231 ☐ **ii)** 0.9727 X **iii)** 0.0865 ☐ **iv)** 0.9958 ☐

**2.** Seja a variável aleatória $X$ e a seguinte função:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.6 & 0 < x < 1 \\ 0.3 & 1 < x < 2 \\ 0.1 & 2 < x < 3 \end{cases}$$

**a.** A função dada pode ser função densidade de probabilidade da variável aleatória $X$? [**Justifique convenientemente**]

Sim, porque $f_X(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$; $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_0^1 0.6dx + \int_1^2 0.3dx + \int_2^3 0.1dx = 1$

**b.** Classifique a variável aleatória. [**Justifique devidamente**]

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.6x & 0 \leq x < 1 \\ 0.3 + 0.3x & 1 \leq x < 2 \\ 0.7 + 0.1x & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -0^-} F_X(x) = 0 = \lim_{x \to -0^+} F_X(x) = 0 = F_X(0)$$

$$\lim_{x \to -1^-} F_X(x) = 0.6 = \lim_{x \to -1^+} F_X(x) = 0.6 = F_X(1)$$

$$\lim_{x \to 2^-} F_X(x) = 0.9 = \lim_{x \to 0^+} F_X(x) = 0.9 = F_X(2)$$

$$\lim_{x \to 3^-} F_X(x) = 1 = \lim_{x \to 3^+} F_X(x) = 1 = F_X(3)$$

Então $F_X(x)$ não tem pontos de descontinuidade, $D_X = \emptyset$ e existe uma função real de variável real $f_X(x)$ tal que $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$ então $X$ é uma v.a. contínua.

**c.** Determine a $P(0.5 \leq X < 2.5)$.

0.95 ☐ 0.9 ☐ 0.65 X 0.4 ☐

**3.** Considere a variável aleatória bidimensional $(X, Y)$ com função densidade conjunta dada por:

$$f(x,y) = \frac{(6-y)}{32} \ (0 < x < 2, 0 < y < 4).$$

**a.** Calcule a média da variável aleatória $X$ quando a variável $Y$ assume o valor 2.

$$f_Y(y) = \int_0^2 f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^2 \frac{6-y}{32}dx = \frac{1}{32}\int_0^2 6 - y\,dx = \frac{1}{32}[\![6x - xy]\!]_0^2 = \frac{3}{8} - \frac{y}{16} \quad 0 < y < 4$$

$$E(X|Y=2) = \int_0^2 x f_{X|Y=2}(x)\,dx = \int_0^2 x\frac{f_{XY}(x,2)}{f_Y(2)}dx = \int_0^2 x\frac{\frac{4}{32}}{\frac{1}{4}}dx = \int_0^2 x\frac{1}{2}dx = \left[\!\!\left[\frac{x^2}{4}\right]\!\!\right]_0^2 = 1$$

**b.** Analise a independência das variáveis $X$ e $Y$.

$$f_X(x) = \int_0^4 f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^4 \frac{6-y}{32}dy = \frac{1}{32}\int_0^4 6 - y\,dy = \frac{1}{32}\left[\!\!\left[6y - \frac{y^2}{2}\right]\!\!\right]_0^4 = \frac{1}{2} \quad 0 < x < 2$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{6-y}{32} = \frac{1}{2} * \left(\frac{3}{8} - \frac{y}{16}\right) = f_X(x) * f_Y(y)$$

Então, as variáveis $X, Y$ são independentes

**4.** Com base na informação recolhida em anos anteriores, sabe-se que é de 0.25 a probabilidade de um indivíduo, residente numa determinada região, aderir às campanhas de vacinação anual contra a gripe. Sabendo que nessa região residem 123 mil pessoas, qual o número mínimo de vacinas que os serviços médicos devem dispor para responderem às necessidades de vacinação com uma probabilidade de pelo menos 95%? **Nota: utilize a lei dos fenómenos raros.**

$X$ **–** indivíduo residente aderir à campanha$\sim B(1, 0.25)$

$Y = \sum_{i=1}^{123000} X_i$ – número de residentes que aderem à campanha $\sim B(123000, 0.25)$

Como $n$ é grande e θ pequeno aplica-se a lei dos fenómenos raros segundo a qual

$$Y = \sum_{i=1}^{123000} X_i \sim B(123000, 0.25) \underset{\rightarrow}{\Rightarrow} Y \dot{\sim} Po(123000 * 0.25)$$
$$a =?: P(Y > a) \geq 0.95 \Rightarrow P(Y \leq a) \leq 0.05$$

**5.** Numa estação de serviço com uma secção de lavagem de carros, sabe-se que, no período entre as 18.00-20:00, o número de chegadas de carros é uma variável aleatória com distribuição de Poisson com média 5. Sabendo que um carro está na fila para ser lavado à mais de meia hora, qual a probabilidade de ter de esperar ainda mais de meia hora para ser lavado? [**Justifique devidamente os cálculos efectuados**]

$W$ – tempo de espera na fila para lavar o carro$\sim Ex(\lambda)$

$X$ – número de carros que chegam à secção de lavagem em 2 horas (4 meias horas)$\sim Po(5)$

$X_1$ – número de carros que chegam à secção de lavagem em meia hora$\sim Po\left(\frac{5}{4}\right)$

Então o tempo médio entre lavagens consecutivas $E(W) = \frac{4}{5} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{5}{4}$

$P(W > 2|W > 1) = \frac{P(W>2)}{P(W>1)} = \frac{e^{-10/4}}{e^{-5/4}} = e^{-5/4} = P(W > 1)$ pela propriedade de falta de memória da exponencial

**6.** Suponha que os gastos mensais de um estudante do ISEG são representados por uma variável aleatória $X_1$ com distribuição normal de média 600€ e desvio padrão 60€ e os de um estudante da Faculdade de Economia do Porto é também modelado por uma variável aleatória $X_2$, também normal mas de média 580€ e desvio padrão 58€. Determine o percentil 90% do gasto mensal do estudante do ISEG?

$X_1 \sim N(600, 60^2)$ $\quad \xi_{0.9}: P(X_1 \leq \xi_{0.9}) = 0.9 \Rightarrow \xi_{0.9} = invnorm(0.9, 600, 60) = 676.8931$

Ou $P(X_1 \leq \xi_{0.9}) = P\left(\frac{X_1-\mu}{\sigma} \leq \frac{\xi_{0.9}-600}{60}\right) = 0.9 \Leftrightarrow P\left(\frac{X_1-\mu}{\sigma} > \underbrace{\frac{\xi_{0.9}-600}{60}}_{z_\varepsilon}\right) = 0.1$

$$\Rightarrow z_\varepsilon = 1.282 = \frac{\xi_{0.9} - 600}{60} \Leftrightarrow \xi_{0.9} = 600 + 1.282 * 60 = 676.8931$$

**7.** Seja uma experiência aleatória representada pela variável aleatória contínua $X$ com média 2 e variância $\frac{1}{6}$. Se repetirmos a experiência aleatória 50 vezes, qual a probabilidade aproximada de que o valor da soma dos valores obtidos em cada uma das repetições seja superior a 103.465?

Pelo teorema do limite central, $\sum_{i=1}^{50} X_i \dot{\sim} N\left(50 * 2, 50 * \frac{1}{6}\right)$

$$P\left(\sum_{i=1}^{50} X_i > 103.465\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{50} X_i \leq 103.465\right) \cong 1 - normcdf(-99999{,}103.465, 100, 8.333)$$

$$= 1 - 0.885 = 0.115$$

Ou $P\left(\sum_{i=1}^{50} X_i > 103.465\right) = 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{50} X_i - 50\mu_X}{\sqrt{50\sigma_X^2}} \leq \frac{103.465 - 50*2}{\sqrt{50*\frac{1}{6}}}\right) = 1 - P(Z \leq 1.2)$

$$= 1 - 0.885 = 0.115$$